МАТЕМАТИКА

МРНТИ 27.37.17

Б. Синчев[1], *А.М. Муханова*[2]

[1]Международный университет информационных технологий
г. Алматы, Казахстан

[2]Алматинский технологический университет, г. Алматы, Казахстан

НЕОБХОДИМЫЕ УСЛОВИЯ ОПТИМАЛЬНОСТИ ДЛЯ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

Аннотация. Рассмотрена задача Больца с закрепленным временем и свободным правым концом для нелинейных дифференциальных уравнений. Установлен новый формализм оптимальности, который утверждает, что для любого процесса стратегия такова, что она является оптимальной для любого подпроцесса по отношению к исходному состоянию этого подпроцесса. Предлагаемый формализм экстремальных задач напрямую использует свойства приращения функционала, нижней грани и теорию интегрального исчисления. Поэтому нахождение экстремума функционала при наличии ограничений сведено к решению дифференциальных неравенств в частных производных. Последнее равносильно определению экстремальной функции из дифференциальных неравенств, обеспечивающей экстремум заданному функционалу. Наличие неравенства расширяет границу применимости предлагаемого метода оптимальности, так как ослабляет требования на экстремальную функцию, наложенные условиями оптимальности Беллмана. Предложены методы решения этих задач с ограничениями на управление. Приведены решения классических задач управления.
Ключевые слова: оптимальное управление, принцип оптимальности, дифференциальное исчисление, интегральное исчисление.

* * *

Түіндеме. Жұмыста қаралатын міндет Больца бекітілген уақытпен және еркін оң шетімен үшін сызықты емес дифференциалдық теңдеулер. Орнатылған жаңа формализм оңтайлылық, ол бекітеді, бұл кез-келген процесс стратегия мынадай, ол үшін оңтайлы болып табылады кез келген подпроцесса қатысты бастапқы жағдай осы подпроцесса. Ұсынылатын формализм экстремалды міндеттерді тікелей пайдаланады қасиеттері өсім функционалын, төменгі қырлары мен теориясын интегралды есептеу. Сондықтан табу экстремума функционалды шектеулер болған кезде жеткізілуі шешімі дифференциалды теңсіздіктер туындылы. Соңғы бет айқындау

қысылтаяң функциясының бірі-дифференциалды теңсіздіктер қамтамасыз ететін глобалді экстремум берілген функционалға қолжетімділік. Болуы теңсіздікті кеңейтеді шекара қолдануға ұсынылатын әдіс тиімді, өйткені әлсіретеді талаптар жылыжайдағы функциясын салынған шарттарына беллманның оңтайлау. Ұсынылатын әдістері осы міндеттерді шешу шектеулермен. Келтірілген шешім классикалық міндеттерді басқару.
Түйінді сөздер: оңтайлы басқару, үйлесімділік принципі, дифференциалдық есептеу, интегралдық есептеу.

* * *

Abstract. The paper considers the purpose of Bolz with fixed time and free right ending for nonlinear differential equations. The new formalism is identified, which states that the strategy of any process is optimal for any sub-process in relation to initial condition of the process. The proposed formalism of extreme task straightly use the properties of excess, functional, lower border and the theory of integral calculation. Thus, finding of extremum of functional under constraints is amounting to the solution of differential inequalities in local derivatives. The last is equivalent of the extreme function from differential inequalities, providing the extremum to the given functional. The presence of inequalities is increasing the border of appliance of the proposed method of optimality, such as it weakens the demands for extreme function, imposed by the conditions of Bellman optimality. The ways of solving these problems with limits for the control were preferred. The solutions of classical tasks of control were proposed.
Key words: optimal control, principle of optimality, differential calculation, integral calculation.

Введение. Результаты работы касаются теории оптимального управления. Оптимизационные методы в настоящее время проникли в теорию и практику управления различными объектами. Каждый новый результат представляет интерес для широкого круга управленцев и ученых. Основным объектом изучения являются задачи о нахождении оптимальных процессов систем управления, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями. Все методы решения этой оптимизационной задачи подразделяются на 2 основные группы:

- формализм Эйлера – Лагранжа – Понтрягина [1-4];
- формализм Гамильтона – Якоби – Беллмана [5-7].

Первая группа решение экстремальной задачи сводит к решению краевой задачи для системы дифференциальных уравнений Эйлера – Лагранжа – Гамильтона на базе экстремальной функции Гамильтона. К ограничениям относятся дифференцируемость функционала и функций в системе дифференциальных уравнений, описывающих объект управления. Этот формализм опирается на вариацию функционала, производные Фреше и Гато, формулу Тейлора, интегрирование по частям, теорему о среднем, классические леммы Лагранжа и Дюбуа – Реймона вариационного исчисления и теорему Ферма. Принцип максимума в теории оптимального управления учитывает ограничения на управление через экстремальную функцию Гамильтона – Понтрягина.

В отличие от первой группы вторая группа сводит задачу о минимуме функционала к интегрированию уравнения Гамильтона – Якоби – Беллмана в частных производных и устраняет эти ограничения. При наличии ограничений на управление роль этого уравнения играет дифференциальное неравенство Беллмана – Кротова [6,8], которое базируется на принципе оптимальности Беллмана [5]. Последняя задача является более сложной, чем краевая задача для обыкновенных дифференциальных уравнений.

В случае численного интегрирования уравнений Беллмана с помощью схемы Моисеева операция определения нижней грани заменяется NP-задачей, т.е. задачей о нахождении кратчайшего пути за разумное время. Решение последней задачи остается открытой проблемой. С другой стороны, принцип оптимальности Беллмана требует, чтобы стратегия управления на оставшихся интервалах времени была выбрана из условия экстремума заданного функционала. При этом стратегия управления зависит только от текущего состояния объекта управления и совершенно не зависит от его предыстории. Однако последнее утверждение справедливо лишь для объектов, фазовые траектории которых не пересекаются, а именно для объектов, определенных состоянием. В случае пересечения фазовых траекторий стратегия управления на оставшихся интервалах времени должна быть выбрана с учетом предыстории объекта, приводящей его в текущее состояние. Поэтому этот принцип оптимальности для таких случаев нуждается в доработке.

Решению данного вопроса в мире не уделяется достаточного внимания, о чём свидетельствуют немногочисленные публикации за последние 5 лет, имеющиеся в зарубежных электронных ресурсах издательств Springerlink и Web of Knowledge и в солидных изданиях России. Однако встречаются некоторые интересные материалы, достаточно разносторонне освещающие решение поставленных задач [9-14]. Следует отметить, что вклад ведущих ученых XXI в. в основном касается оптимизации процессов в конкретных системах управления, а научные работы по совершенствованию существующих принципов оптимальности отсутствуют.

Предлагаемый формализм экстремальных задач напрямую использует свойства приращения функционала, нижней грани и теорию интегрального исчисления [15] и обобщает результаты в [8,9]. Поэтому нахождение экстремума функционала при наличии ограничений сведено к решению дифференциальных неравенств в частных производных. Последнее равносильно определению экстремальной функции из дифференциальных неравенств, обеспечивающей экстремум заданному функционалу. Наличие неравенства расширяет границу применимости предлагаемого метода оптимальности, так как ослабляет требования на экстремальную функцию, наложенные условиями оптимальности Беллмана. В случае задания экстремальной функции интегрирование дифференциальных неравенств сводится к исследованию знака приращения функционала, что равносильно исследованию неотрицательности некоторой функции многих переменных и ее нулей. Поэтому эти 2 факта являются дополнительной информацией для изучения близости необходимых условий оптимальности к достаточным условиям, который остается нерешенным вопросом.

Таким образом, возникают дополнительные вопросы к дальнейшему обоснованию и применению метода Беллмана. Изучение близости достаточных условий оптимальности к необходимым условиям также относится к нерешенному вопросу.

Постановка задачи оптимального управления. Сформулируем задачу оптимального управления в виде:

$$J(t_0, t_1, x(.), u(.)) = \int_{t_0}^{t_1} f_0(t, x(t), u(t))dt + F(t_1, x(t_1)) \to inf \tag{1}$$

при условиях

$$\dot{x} = f(t, x(t), u(t)), \qquad x(t_0) = x_0,\ t_0 \le t \le t_1 \tag{2}$$

$$u(t) \in U(t), \quad t_0 \le t \le t_1 \tag{3}$$

где F – скалярные ограниченные непрерывные функции;

f – ограниченные непрерывные функции размерности n;

u – ограниченные кусочно-непрерывные управления размерности m;

$U(t)$ – ограничения на управления.

Задача Больца с закрепленным временем и свободным правым концом ставится следующим образом: на множестве $U(t)$ найти такую пару $(x_*(t), u_*(t))$, на которой функционал (1) имел бы наименьшее значение на отрезке $t_0 \le t \le t_1$ при ограничениях (2) и (3).

Метод оптимальности. Введем несколько определений:

Определение 1.

Если U – множество функций и каждой функции $u(t) \in U$, относится определенное число $J(u)$, то говорят, что на множестве U задан функционал J.

Определение 2.

Точку $u_* \in U$ называют точкой минимума функционала $J(u)$ на множестве U, если

$$J(u_*) \le J(u)\ \forall u \in U, \tag{4}$$

и обозначают $\inf_{u \in U} J(u) = J(u_*) = J_*$.

Для кусочно-непрерывных управлений требовать существование непрерывно дифференцируемого решения задачи (2), вообще говоря, не имеет смысла. Поэтому мы будем пользоваться следующим более общим определением решения системы дифференциальных уравнений (2).

Определение 3.

Непрерывную функцию

$$x(t) = \int_{t_0}^{t} f(\tau, x(\tau), u(\tau))d\tau + x(t_0), \quad t_0 \le t \le t_1 \tag{5}$$

будем называть решением или траекторией задачи (2), соответствующей начальному условию $x(t_0)$ и управлению $u(\cdot)$. Здесь интеграл является интегралом Римана, а в случае измеримого управления $u(\cdot)$ ($u \in L_p^m[t_0, t_1]$ – пространство измеримых функций) выражение (5) будет интегралом Лебега.

Первоначально введем непрерывно дифференцируемую функцию $B(t,x)$, подлежащую определению, и следующие формулы:

$$S_{min}(t, x(\cdot), u_*(\cdot)) = \inf_{u \in U} S(t,x,u), t_0 \le t < t_1 \qquad (6)$$

$$s_{min}(t_1, x(t_1)) = F(t_1, x(t_1)) - \inf_{x(t_1) \in E^n} B(t_1, x(t_1)) \ge 0, \qquad (7)$$

где $S(t,x,u) = B_x'(t,x,)f(t,x,u) + B_t(t,x) + f^0(t,x,u)$,

E^n – арифметическое n-мерное пространство, наделенное стандартной евклидовой структурой.

Лемма. Экстремальная функция $B\ (t,x)$ является решением задачи Больца (1) при ограничениях (2), (3), если выполнены условия:

$$S(t, x(t), u(t)) \ge S_{min}(t, x_*(t), u_*(t)),\ t_0 \le t < t_1 \qquad (8)$$

$$s_{min}(t_1, x(t_1)) \ge 0. \qquad (9)$$

Доказательство. Для дальнейшего применения соотношений (6), (7) рассмотрим две допустимые пары $(x(t), u(t))$, $(x_*(t), u_*(t))$. Причем последнюю пару полагаем абсолютной минималью и $x_*(t_0)$, так как исследуется задача на экстремум с закрепленным временем. Для учета ограничений (2), (3) и при этом значение функционала (1) не изменится, если проведем следующее преобразования:

$$J(t_0, t_1, x(\cdot), u(\cdot)) = \int_{*}^{t_1} f_0(t, x(t), u(t))dt + F(t_1, x(t_1)) + \\ + \int_{t_0}^{t_1} \frac{d}{dt}(B(t,x))dt - \int_{t_0}^{t_1} \frac{d}{dt}(B(t,x))dt \qquad (10)$$

Непрерывность $x(t)$ в условии (5) и непрерывность интегралов, входящих в формулу (10), позволяет провести объединение слагаемых в (10) при соответствующих значениях переменной интегрирования. Тогда получим

$$J(t_0,t_1,x(\cdot),u(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} (f_0(t,x(t),u(t)) + \frac{d}{dt}(B(t,x)))dt + F(t_1,x(t_1)) -$$
$$- B(t_1,x(t_1)) + B(t_0,x(t_0)) \quad (11)$$

где $f_0(t,x(t),u(t)) + \frac{d}{dt}(B(t,x)) = S(t,x(t),u(t))$.

На основе неравенства (4) в определении 2 и свойств нижней грани приращение функционалов для вышеуказанных допустимых пар имеет вид:

$$J(t_0,t_1\ x(\cdot),u(\cdot)) - J(t\ x_*(\cdot),u_*(\cdot)) = \quad (12)$$
$$= \int_{t_0}^{t_1}(S(t,x(t),u(t)) - S_{min}(t,x_*(t),u_*(t)))dt + s_{min}(t_1,x(t_1)) \geq 0$$

Здесь терминальные части равны:

$$F(t_1,x(t_1)) = B(t_1,x(t_1)) = B(t_1,x_*(t_1)) \quad (13)$$

для задачи Больца с закрепленным временем и при отсутствии фазовых ограничений.

Из интегрального исчисления [15] и $s_{min}(t_1,x(t_1)) \geq 0$ для подинтегрального выражения из (12) имеем условие:

$$S(t,x(t),u(t)) - S_{min}(t,x_*(t),u_*(t)) \geq 0 \quad (14)$$

Здесь $S_{min}(t,x_*(t),u_*(t))$ определяется на основе (6). Таким образом, условия (8), (9) следуют из (13), (14).Лемма доказана.

Примечание 1. Полученные результаты справедливы для задач оптимального управления Лагранжа и Майера, так как они являются подзадачами задачи Больца.

Примечание 2. На самом деле, неравенство (14) показывает, что определение минимального значения функционала сведено к поиску нулей неотрицательной функции на основе известных методов.

Важно отметить, что условия леммы являются более общими по сравнению с известными условиями оптимальности Беллмана [5]:

$$\inf_{u\in U}(B'_x(t,x)f(t,x,u) + B_t(t,x) + f_0(t,x,u)) = 0.$$

Теперь поставленную задачу Больца сможем решить на основе следующей теоремы.

Теорема. Пусть экстремальная функция $B(t,x)$ – решение задачи (8), (9) и достигается нижняя грань в (6) на кусочно-непрерывном управлении. Тогда пара $(x_*(t), u_*(t))$ является решением задачи Больца (1)-(3) с закрепленным временем и свободным правым концом.

Доказательство. Возьмем допустимую пару $(x(t), u(t))$ $(t_0 \le t_*, <t_1)$ задачи (2), (3) с начальным условием $x(t_0)$. Тогда из леммы следует справедливость формулы (11) и неравенства (14). Так как $x(t_0) = x_*(t_0)$ и при $(x(t), u(t)) = x_*(t), u_*(t))$, неравенство (12) обращается в нуль. Это означает, что достигается нижняя грань в соотношении (6) и следуют условия (8), (9) из (14), (13). Что и требовалось доказать.

О связи предлагаемого формализма оптимальности с принципом оптимальности Беллмана. Из основной теоремы интегрального исчисления [15] следует справедливость разбиения интеграла(11) на два интеграла для

$\forall t \epsilon [t_0, t_1]$: $\int_{t_0}^{t_1} = \int_{t_0}^{t} + \int_{t}^{t_1}$.

После этого для вывода принципа оптимальности Беллмана можно воспользоваться подходами из [1,8].

Согласно этому разбиению и основной теореме интегрального исчисления второй интеграл (формула (11) с переменным нижним пределом) перепишется следующим образом:

$$J(t, x(.), u(.)) = \int_{t}^{t_1} S(\tau, x(\tau), u(\tau))d\tau + B(t, x),$$

где $S(t, x, u) = B_x'(t, x,)f(t, x, u) + B_t(t, x) + f^0(t, x, u)$.

Тогда в силу системы дифференциальных уравнений(2) и формулы (7) имеем:

$$\frac{d}{d\tau}\big(B(\tau, x)\big) = S(\tau, x(\tau), u(\tau)) - f_0\big(\tau, x(\tau), u(\tau)\big)$$

справедливость полной производной всюду на $[t,t_1]$ за исключением, быть может, конечного числа точек. Интегрируя это тождество по $\tau \epsilon$ $[t,t_1]$ с учетом условия (7), получим:

$$F(t_1, x(t_1)) - B(t,x) = \int_t^{t_1} S(\tau, x(\tau), u(\tau))d\tau - \int_t^{t_1} f_0(\tau, x(\tau), u(\tau))d\tau,$$

что равносильно верхнему интегралу, и в соответствии с [8] имеем:

$$J(t\ x, u_*(\cdot)) = \min_{u\epsilon V} J(t\ x, u(\cdot)) = B(t,x).$$

Следовательно, принцип оптимальности Беллмана следует из предлагаемого формализма оптимальности как частный случай. Последнее утверждение вытекает из формулировки самого принципа оптимальности Беллмана [1]: оптимальная политика обладает тем свойством, что, каковы бы ни были начальное состояние и начальное решение, последующие решения должны составлять оптимальную политику относительно состояния, являющегося результатом применения первого решения. В той же работе показан вывод уравнения Беллмана из уравнений Эйлера – Лагранжа. Новый формализм оптимальности утверждает, что для любого процесса стратегия такова, что она является оптимальной для любого подпроцесса по отношению к исходному состоянию этого подпроцесса.

Для вывода принципа максимума достаточно получить функцию Гамильтона – Понтрягина:

$$H(t,x,u) = p'(t)f(t,x,u) - f^0(t,x,u),$$

где $p(t) = B_x(t,x,)$.

Обсуждение результатов и решение оптимизационных задач. Анализ полученных результатов и преимущества предлагаемого метода оптимальности проведем на основе решения классических примеров.

1. Пусть подинтегральное выражение (1) и правые части системы дифференциальных уравнений (2) имеют вид соответственно [6]:

$$f_0 = a^0(t)'x + h^0(t,u),\ f = A(t)x + h(t,u),$$

где матрица $A\ (t)\ nxn$; вектор-функция $a^0(t)$ – вектор-функция размерности $nx1$; h^0 – скаляр.

Ставится задача о минимуме функционала (1) при

$$F(t_1, x(t_1),) = 0.$$

Подставив f_0, f в $S(t,x,u)$, получим:

$S(t,x,u) = (A'B_x + a^0)x + B_t + B_x'h + h^0 \geq 0, \qquad u \in V,$

(') – транспонирование;

B_x – вектор-функция размерности $nx1, B_t$;

B_t – скаляр.

Выберем экстремальную функцию B (t,x) так, чтобы функция $S(t,x,u)$ не зависела от переменной x, а именно $B(t,x) = \varphi'(t)x$. Зададим вектор-функцию $\varphi(t)$ системой дифференциальных уравнений $\dot{\varphi} = -A'(t)\varphi + a^0(t), \varphi(t_1) = 0$.

Тогда функция S не зависит от переменной x и B $(t_1,x(t_1)$=0. Решая последнюю задачу Коши, находим $\varphi(t)$. Тогда оптимальное управление $u_*(t)$ определяем из условия:

$f_0 = \varphi(t)'h(t,u_*) + h^0(t,u_*) = 0$, следующего из нуля функции S.

В случае $|u(t)| \leq 1$,

$h^0(t,u) = b^0(t)u, h(t,u) = b(t)u, b(t)$ – функция размерности n; $b^0(t)$ – скаляр.

Эти функции непрерывны и дифференцируемы.

$$S = (\varphi(t)'b(t) + b^0(t))u \geq 0, |u(t)| \leq 1.$$

Отсюда имеем

$S = |\varphi(t)'b(t) + b^0(t)|$ и $u_*(t) = sign(\varphi(t)'b(t) + b^0(t))$.

Уравнение $\varphi(t)'b(t) + b^0(t) = 0$ задает множество точек переключения.

Таким образом, задача об оптимальном достижении абсциссы t_1 из любого начального положения x (t_0)=x_0 решена до конца для линейных функуций f^0 и f относительно фазовых координат x .

2. Пусть требуется минимизировать функционал [8]:

$$J(u) = \int_0^{t_1} u^2(t)dt + \alpha x^2, \qquad const = \alpha > 0$$

при условиях $\dot{x} = u(t), x(0) = x_0, u = u(t)$ – непрерывная функция, числа t_1, x_0 заданы. Здесь $G(t) = E^1, U(t) = E^1,\ 0 \le t \le t_1$.
В рассматриваемом случае необходимо установить неотрицательность функции S (txu) относительно переменной u:

$$S(t,x,u) = B_x\ (t,x)u + B_t(t,x) + u^2 \ge 0\ u \in E^1, x \in E^1,\ 0 \le t \le t_1,$$

$$B(t_1, x(t_1)) = \alpha x^2.$$

Для существования вещественного нуля функции S (t,x,u) найдем дискриминант, удовлетворяющий условию $d = B_x^2(t,x) - 4B_t(t,x) \ge 0$. Функция S (t,x,u) принимает единственное значение нуль, когда дискриминант *d=0* Дискриминант определяется на базе результанта [15].

Тогда имеем уравнение в частных производных

$$-\frac{B_x^2(t,x)}{2} + B_t(t,x) = 0$$

Экстремальную функцию B (t,x) будем искать в виде полинома $B(t,x) = \varphi_0(t) + \varphi_1(t)x + \varphi_2(t)x^2$ переменной x. Подставим это выражение в уравнение в частных производных и получим:

$$\dot{\varphi}_0(t) + \dot{\varphi}_1(t)x + \dot{\varphi}_2(t)x^2 - \frac{(\varphi_1(t) + 2\varphi_2(t)x)^2}{4} = 0, x = E^1, 0 \le t \le t_1,$$

$$\varphi_0(t_1) + \varphi_1(t_1)x + \varphi_2(t_1)x^2 = \alpha x^2, x \in E^1$$

Приравнивая коэффициенты при соответствующих степенях x придем к следующей задаче Коши:

$$\dot{\varphi}_0 - \frac{\varphi_1^2}{4} = 0, \dot{\varphi}_1 - \varphi_1\varphi_2 = 0, \dot{\varphi}_2 - \varphi_2^2 = 0, 0 \le t \le t_1.$$

Отсюда находим решение: $\varphi_0(t) = 0,\ \varphi_1(t) = 0,\ \varphi_2(t) = \frac{\alpha}{1-\alpha(t-t_1)}$.

Таким образом, здесь экстремальная функция (функция Беллмана) имеет вид: $B(t,x) = \frac{\alpha x^2}{1-\alpha(t-t_1)}$,

оптимальное управление равно: $u_*(t,x) = -\frac{B_x\ (t,x)}{2} = \frac{\alpha x}{1-\alpha(t-t_1)}$.

Отметим, что в этом примере нижняя грань функционала найдена на основе результанта.

Выводы

• построен единый формализм решения задач оптимального управления на основе интегрального исчисления;

• получены необходимые условия оптимальности в форме дифференциальных неравенств в частных производных;

• приведены решения классических оптимизационных задач.

Важно отметить, что предложен новый принцип оптимальности для решения задач оптимального управления, не связанный с известными принципами Беллмана и Понтрягина.

Список литературы

1 *Цлав Я.Л.* Вариационное исчисление и интегральные уравнения. – М.: Наука, 1970. – 192 с.

2 *Алексеев В.М., Тихомиров В.М.* Оптимальное управление. – М.: Наука, 2007. – 408 с.

3 *Якубович В.А.* Абстрактная теория оптимального управления: "Нелинейные системы. Частотные и матричные неравенства". – М.: Физмат лит., 2006. – 607 с.

4 *Busu D., Miroshnik V.* Dynamic Systems Modeling and Optimal Control. – Nagasaki: Nagasaki University, 2015. – 197 p.

5 *Беллман Р.* Динамическое программирование. – М.: ИЛ, 1960. – 400 с.

6 *Krotov V. F.* Global methods in optimal control theory. – New York: Marcel Dekker, 1996. – 408 с.

7 *Vinter R. B.* Optimal control. – Boston-Basel-Berlin: Burkhauser, 2000. – 504 с.

8 *Васильев Ф.П.* Численные методы решения экстремальных задач. – М.: Наука, 1980. – 519 с.

9 *Dykhta V. A.* Lyapunov-Krotov Ineguality and Sufficient Conditions in Optimal Control // Journal of Mathematical Sciences. – 2004. – Vol. 121. – P. 2156-2177.

10 *Cristiani E., Martinon P.* Initialization of the Shooting Method via the Hamilton-Jacobi-Bellman Approach. // Journal of Optimization

and Applications. – 2010.– V. 146. P. 321-346.

11 *Кротов В.Ф., Булатов А.В., Батурина О.В.* Оптимизация линейных систем с управляемыми коэффициентами // Автоматика и телемеханика. – 2011. – № 6. – С. 64-78.

12 *Maurizio F.* Optimal Control and Dynamic Programming Principle // Encyclopedia of Systems and Control. – 2015. – P. 956-962.

13 *Александров В.М.* Квазиоптимальное управление динамическими системами // А и Т. – 2016. – № 7. – С. 47-67.

14 *Мищенко Е.Ф., Никольский М.С.* О задаче быстродействия для трехмерных и четырехмерных управляемых систем // Тр. МИАН. – 2012. – Т. 277. – С. 192-198.

15 *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике. – М.: Наука, 1973. – 832 с.