МЕХАНИКА

УДК 534.1 *МРНТИ 30.15.27*

К. К. Камматов, к.ф.-м.н., ***В. Е. Махатова***, к.т.н.

Атырауский государственный университет
им. Х. Досмухамедова

КОЛЕБАНИЯ НЕКОТОРЫХ СУЩЕСТВЕННО НЕЛИНЕЙНЫХ АВТОНОМНЫХ СИСТЕМ С МЕДЛЕННО МЕНЯЮЩИМИСЯ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Статья посвящена развитиіс и распространениіс метода Г.В. Каменкова на существенно нелинейные системы дифференциальных уравнений. Получены новые результаты, имеіссщие теоретическое и прикладное значение.

Ключевые слова: нелинейные автономные системы, амплитуда и чистота, вертикальные колебания, продольные колебания, условия колебаний, устойчивость колебаний.

Авторлардың бұл жұмыстары дифференциалдық теңдеулердің елеулі сызықтық емес жүйелеріне Г.В. Каменковтың әдісін дамытуға және таратуға арналған. Теориялық және қолданбалы маңызы бар жаңа нәтижелер алынды.

Түйінді сездер: ауқымды сызықты емес автономиялық (дербес) жүйелер, амплитуда және жиілік, тік тербелістер, ұзына бойына тербелістер, тербелістердің шарттары, тербелістердің орнықтылығы.

The article is dedicated to the development and dissemination of G.V. Kamenkov method to essentially nonlinear system of differential equations. The article presents new results that have theoretical and practical importance.

Key words: nonlinear autonomous systems, amplitude and frequency, vertical vibrations, lengthwise vibrations, conditions of vibrations, stability of vibrations.

Работа посвящена развитию и распространению метода Г. В. Каменкова на существенно нелинейные системы дифференциальных уравнений. Исследовано влияние амплитуды и частоты вертикальных и продольных колебаний на жесткость нелинейных рессор, которые имеют место при движении самолетов, вертолетов и автомобилей по синусоидальному профилю.

Устанавливаются условия существования колебаний и их устойчивость, описываемые автономной существенно нелинейной системой некоторого вида с медленно меняющимися коэффициентами методом Г. В. Каменкова [1]. Рассмотрим автономную систему со многими степенями свободы с медленно меняющимися коэффициентами следующего вида:

$$\begin{aligned} \dot{x}_s &= X_{s0}^{(m_0)}(x_s, y_s) + \mu X_{s1}^{(m1)}\left(\overset{n}{\underset{1}{x_s}}, \overset{n}{\underset{1}{y_s}}, \tau\right) + \mu^2 X_{s2}^{(m2)}\left(\overset{n}{\underset{1}{x_s}}, \overset{n}{\underset{1}{y_s}}, \tau\right) + \dots, \\ \dot{y}_s &= Y_{s0}^{(m_0)}(x_s, y_s) + \mu Y_{s1}^{(m1)}\left(\overset{n}{\underset{1}{x_s}}, \overset{n}{\underset{1}{y_s}}, \tau\right) + \mu^2 Y_{s2}^{(m2)}\left(\overset{n}{\underset{1}{x_s}}, \overset{n}{\underset{1}{y_s}}, \tau\right) + \dots, \end{aligned} \tag{1}$$

где правые части обращаются в нуль при $x_s = y_s = 0$,

$X_{s0}^{(m_0)}, Y_{s0}^{(m_0)}$ - однородные многочлены, не содержащие линейных членов относительно x_s, y_s

Причем $$X_{s0}^{(m_0)}(x_s, y_s) = \sum_{p=0}^{m_0} A_{sp} x_s^{m_0-p} y_s^{p}$$

$$Y_{s0}^{(m_0)}(x_s, y_s) = \sum_{p=0}^{m_0} B_{sp} x_s^{m_0-p} y_s^{p}$$

где μ - бесконечно малый положительный параметр;

$\tau = \mu t$ - медленное время;

$X_{si}\left(\overset{n}{\underset{1}{x_s}}, \overset{n}{\underset{1}{y_s}}, \tau\right), Y_{si}\left(\overset{n}{\underset{1}{x_s}}, \overset{n}{\underset{1}{y_s}}, \tau\right), (i = 1,2,3,\dots)$ - многочлены относительно x_s, y_s, любой конечной степени m_i с коэффицентами.

Причем

$$X_{s1}^{(mi)}\left(\overset{n}{\underset{1}{x_s}}, \overset{n}{\underset{1}{y_s}}, \tau\right) = \sum_{k_1^{(i)}+\dots+k_n^{(i)}+e_1^{(i)}+\dots+e_n^{(i)}=m_0-1}^{m_i} A_{si}^{(k_1^{(i)} \dots e_n^{(i)})}(\tau) x_1^{k_1^{(i)}} x_2^{k_2^{(i)}} \dots x_n^{k_n^{(i)}} y_1^{e_1^{(i)}} y_2^{e_2^{(i)}} \dots y_n^{e_n^{(i)}}$$

$$Y_{s1}^{(mi)}\left(\overset{n}{\underset{1}{x}}_s, \overset{n}{\underset{1}{y}}_s, \tau\right) = \sum_{k_1^{(i)}+\ldots+k_n^{(i)}+e_1^{(i)}+\ldots+e_n^{(i)}=m_0-1}^{m_i} B_{si}^{(k_1^{(i)} \ldots e_n^{(i)})}(\tau) x_1^{k_1^{(i)}} x_2^{k_2^{(i)}} \ldots x_n^{k_n^{(i)}} y_1^{e_1^{(i)}} y_2^{e_2^{(i)}} \ldots y_n^{e_n^{(i)}}.$$

Переходим в системе (1) к новым переменным r_s, θ_s по равенствам $x_s = \rho_s \sin\theta_s, r_s = \rho_s \exp\Phi_{s0}$ (2)

где $\Phi_{s0} = -\int_0^{\theta_s} \frac{F_{s0}^{(m_0)}(\theta_s)}{R_{s0}^{(m_0)}(\theta_s)} d\theta_s$, $R_{s0}^{(m_0)} > 0$

$F_{s0}^{(m_0)}(\theta_s) = X_{s0}^{(m_0)} \cos\theta_s + Y_{s0}^{(m_0)} \sin\theta_s$, $R_{s0}^{(m_0)}(\theta_s) = -X_{s0}^{(m_0)} \sin\theta_s + Y_{s0}^{(m_0)} \cos\theta_s$

Систему (1) приведем к виду:

$$\begin{aligned} r_s &= \mu F_{s1}^{(m'_1)}(r_s, \theta_s, \tau) + \mu^2 F_{s2}^{m'_2}(r_s, \theta_s, \tau) + \ldots \\ \theta_s &= R_{s0}^{(m'0_1)}(r_s, \theta_s, \tau) + \mu^2 F_{s2}^{m'_2}(r_s, \theta_s, \tau) + \ldots, \end{aligned} \qquad (3)$$

где

$$R_{s0}^{(m_0)}(r_s, \theta_s) = \left[-X_{s0}^{(m_0)}(\cos\theta_s, \sin\theta_s)\sin\theta_s + Y_{s0}^{(m_0)}(\cos\theta_s, \sin\theta_s)\cos\theta_s\right] r_s^{m_0-1} \exp(m_0-1)\Phi_{s0},$$

$$F_{s1}^{(m_1)}(r_s, \theta_s) = X_{s1}^{(m_1)} \cos\theta_s + Y_{s1}^{(m_1)} \sin\theta_s [X_{s0}^{(m_0)}(r_s \exp(-\Phi_{s0})\cos\theta_s, r_s \exp(-\Phi_{s0})\sin\theta_s)\cos\theta_s +,$$

$$Y_{s0}^{(m_0)}(r_s \exp(-\Phi_{s0})\cos\theta_s, r_s \exp(-\Phi_{s0})\sin\theta_s)\sin\theta_s]+,$$

$$Y_{s0}^{(m_0)}(r_s \exp(-\Phi_{s0})\cos\theta_s, r_s \exp(-\Phi_{s0})\sin\theta_s)\cos\theta_s]^{-1}(-X_{s1}^{(m_1)} \sin\theta_s + Y_{s1}^{(m_1)} \cos\theta_s).$$

Учитывая, что F_{s1}, R_{s2} есть многочлены относительно $\overset{n}{\underset{1}{r_s}}$ с коэффицентами, являющимися формами от $\sin\theta_s, \cos\theta_s$, в дальнейшем для удобства представим их в виде:

$$F_{s1}^{(m_1)}(r_s, \theta_s, \tau) = \sum_{k_1^{(s)}+\ldots+k_n^{(s)}=m_0-1}^{N_1^{(s)}} A_{si}^{(k_1^{(s)} \ldots k_n^{(s)})}(\theta_s, \tau) r_1^{k_1^{(s)}} r_2^{k_2^{(s)}} \ldots r_n^{k_n^{(s)}},$$

где s=1,2,…,n, i=1,2,3,…, $k_s^{(s)} \geq m_0 - 1$, $N_1^{(s)}$ – наивысшие степени многочлена;

F_{si}, A_{si} - периодические функции, относительно $\overset{n}{\underset{1}{\theta_s}}$ с общим периодом, равным 2π. Исключая из (3), получим уравнение:

$$\frac{r_s^1}{\theta_s} = r_s^1 = \frac{\mu F_{s1}(r_s,\theta_s,\tau)+\mu^2 F_{s2}(r_s,\theta_s,\tau)+\ldots}{R_{s0}(r_s,\theta_s,\tau)+\mu R_{s1}(r_s,\theta_s,\tau)+\ldots} = \mu R_{s1}(r_s,\theta_s,\tau)+\mu^2 R_{s2}(r_s,\theta_s,\tau)+\ldots \tag{4}$$

где $$F_{si}(r_s,\theta_s,\tau) = \sum_{k_1^{(s)}+\ldots+k_n^{(s)}=m_0-1}^{M_1^{(s)}} A_{si}^{(k_1^{(s)},\ldots,k_n^{(s)})}(\theta_s,\tau) r_1^{k_1^{(s)}} r_2^{k_2^{(s)}} \ldots r_n^{k_n^{(s)}}$$

при условии, что $R_{s0}(r_s,\theta_s)+\mu R_{s1}(r_s,\theta_s,\tau)+\ldots>0$.

Рассмотрим новые переменные согласно подстановке

$$r_s = \rho_s + \sum_{k=1}^{a} \mu^k \sum_{k_1^{(s)}+\ldots+k_n^{(s)}=m_0-1}^{M_1^{(s)}} u_{sk}^{(k_1^{(s)},\ldots,k_n^{(s)})}(\theta_s,\tau)\,\rho_1^{k_1^{(s)}}\,\rho_2^{k_2^{(s)}}\ldots\rho_n^{k_n^{(s)}} \tag{5}$$

где $u_{sk}^{(k_1^{(s)},\ldots,k_n^{(s)})}$ (θ_s,τ) - θ_s подлежащие определению, а $k_s^{(s)} \geq m_0-1>0$.

Теперь вспомогательные функции $u_{sk}^{k_1^{(s)},\ldots,k_n^{(s)}}(\theta_s,\tau)$ выбираем так, чтобы удовлетворялись следущие уравнения:

$$-\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial u_{sk}^{(k_1^{(s)},\ldots,k_n^{(s)})}(\theta_s,\tau)}{\partial\theta_i} + A_{sk}^{(k_1^{(s)},\ldots,k_n^{(s)})}(\theta_s,\tau)+B_{sk}^{(k_1^{(s)},\ldots,k_n^{(s)})}(\theta_s,\tau)+y_{sk}^{(k_1^{(s)},\ldots,k_n^{(s)})}(\tau), \tag{6}$$

где $g_{sk}^{(k_1^{(s)},\ldots,k_n^{(s)})}$ – неизвестные величины, зависящие только от τ.

В силу периодичности функции $u_{sk}^{(k_1^{(s)},\ldots,k_n^{(s)})}$ неизвестные $g_{sk}^{(k_1^{(s)},\ldots,k_n^{(s)})}$ определяются

$$g_{sk}^{(k_1^{(s)},\ldots,k_n^{(s)})}(\tau) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int_0^{2\pi}\ldots\int_0^{2\pi}\left[A_{sk}^{(k_1^{(s)},\ldots,k_n^{(s)})}(\theta_s,\tau)+B_{sk}^{(k_1^{(s)},\ldots,k_n^{(s)})}(\theta_s,\tau)d\theta,\ldots,d\theta\right] \tag{7}$$

Определив таким образом $g_{sk}^{(k_1^{(s)}\dots k_n^{(s)})}$ систему (9), далее с помощью линейного неособого преобразования

$$\rho_s = \tilde{\rho}_s + \sum_{k=1}^{\alpha} \mu^k \left[\tilde{A}_{s1}^{(k)}\tilde{\rho}_1 + \dots + \tilde{A}_{s,s-1}\tilde{\rho}_{s,s-1} + \tilde{A}_{s,s+1}\tilde{\rho}_{s,s+1} \dots + \tilde{A}_{sn}^{(k)}\tilde{\rho}_n\right]$$

можно представить в виде (где сохранено старое обозначение переменных)

$$\rho_s^1 = \sum_{k=1}^{\alpha} \mu^k Q_{sk}^{(M_1^{(s)})}(\rho_s,\tau) + \mu^{k+1} Q_{s,\alpha+1}^{M_{\alpha+1}^{(s)}}(\rho_s,\theta,\tau) + \dots, \tag{8}$$

где $$Q_{sk}^{(M_1^{(s)})}(\rho_s,\tau) = \sum_{k_1^{(s)}+\dots+k_n^{(s)}=m_0-1}^{M_1^{(s)}} g_1^{k_1^{(s)}\dots k_n^{(s)}}(\tau)\rho_1^{k_1^{(s)}}\rho_2^{k_2^{(s)}}\dots+\rho_n^{k_n^{(s)}}$$

Если только параметр μ удовлетворяет условиям

$$1 + \sum_{k=1}^{\alpha} \mu^k \sum_{k_1^{(s)}+\dots+k_n^{(s)}=m_0-1}^{M_1^{(s)}} u_{sk}^{(k_1^{(s)}\dots k_n^{(s)})}(\theta_s,\tau)k_n^{(s)}\rho_1^{k_1^{(s)}}\rho_2^{k_2^{(s)}}\dots\rho_n^{k_n^{(s)}} > 0, \tag{9}$$

с точностью до членов α -го порядка стационарные решения системы (8) определяются системой алгебраических уравнений [2,3]:

$$\sum_{k=1}^{\alpha} \mu^k \sum_{k_1^{(s)}+\dots+k_n^{(s)}=m_0-1}^{M_1^{(s)}} g_{sk}^{(k_1^{(s)}\dots k_n^{(s)})}(\tau)\rho_1^{k_1^{(s)}}\rho_2^{k_2^{(s)}}\dots\rho_n^{k_n^{(s)}} > 0, \tag{10}$$

корни которой при фиксированном значении $\tau = \tau^*$ из интервала $[0,\infty]$ в нашем случае обозначаем, как

$$(\rho_{1k},\rho_{2k}\dots\rho_{nk},\tau^*),(\rho_{1k},\rho_{2k}\dots\rho_{nk},\tau^*)_2,\dots(\rho_{1k},\rho_{2k}\dots\rho_{nk},\tau^*)_n \tag{11}$$

Теорема 1. Каждому набору n нечетно-кратных вещественных, неотрицательных корней (11) системы (10) α - го приближения соответствует стационарное решение системы (1) или (3) независимо от членов порядка (α +1) и выше относительно [2,3].

В самом деле, поскольку в многочленах $Q_{sk}^{M_1^{(s)}}, k_s^{(s)} \geq m_0 - 1 > 0$, выражения для ρ_s^1 можно представить в виде:

$$\rho_s^1 = \sum_{k=1}^{a} \mu^k Q_{sk}^{(M_1^{(s)})}(\rho_s, \tau^*) + \sum_{k=1}^{a} \mu^k \rho^{v_{s1}} a_{v_{s1}}(\rho_1, \dots, \rho_{s-1}, \rho_n, \tau^*) \rho_s^{k_{s1}} + \tag{12}$$

$$a_{v_{s1}-1}(\rho_1, \dots, \rho_{s-1}, \rho_{s+1}, \rho_n, \tau^*) \rho_s^{k_{s1}-1} + \dots + a_{v_1}(\rho_1, \dots, \rho_{s-1}, \rho_{s+1}, \rho_n, \tau^*)].$$

По теореме неявных функций из (12) можно определить $\rho_s = \rho_s(\rho_1, \dots, \rho_{s-1}, \rho_{s+1}, \rho_n, \tau^*)$ в виде k_{sk} различных зависимостей. Тогда получим, что

$$\rho_s^1 = \sum_{k=1}^{a} \mu^k \rho_s^{v_{s1}} \prod_{i_1=1}^{k_{s1}} [\rho_s - \rho_s^{(i_1)}(\rho_1, \dots, \rho_{s-1}, \rho_{s+1}, \rho_n, \tau^*)] + \dots,$$

где $v_{sk} + k_{sk} = M_k^{(s)}; s = 1, 2, \dots, n; k = 1, 2, \dots a.$

Взяв вещественные неотрицательные корни из набора (11), получим

$$\rho_s^1 = \sum_{k=1}^{a} \mu^k \rho_s^{v_{s1}} \prod_{i_1=1}^{\omega_{s1}} [\rho_s - \rho_s^{(i_1)}(\rho_1, \dots, \rho_{s-1}, \rho_{s+1}, \rho_n, \tau^*)] A_{sk}(\rho_n, \tau^*) + \dots,$$

где многочлены $A_{sk}(\rho_n, \tau^*)$, степень которых равна $M_k^{(s)} - k_{sk} - \omega_{sk}$, сохраняют знак для всех значений $\rho_s > 0$. Возьмем из набора (11) такую группу корней

$$\rho_{1k}^{(i_1^{(1)})}, \rho_{2k}^{(i_2^{(1)})}, \rho_{nk}^{(i_n^{(1)})}, \tag{13}$$

где $i_s^{(k)}$ - соответствует только вещественным неотрицательным корням нечетной кратности.

Рассмотрим далее для каждой переменной область, образованную двумя следующими замкнутыми кривыми:

$$\begin{aligned} \rho_s &= \rho_{sk}^{(i_s^{(1)})} + \varepsilon_{s1}; \\ \rho_s &= \rho_{sk}^{(i_s^{(1)})} + \varepsilon_{s2}; \end{aligned} \tag{14}$$

где положительное число $\varepsilon_{s1}, \varepsilon_{s2}$, удовлетворяет условиям

$$\varepsilon_{s1} < \rho_{sk}^{(i_s^{(1)}+1)} - \rho_{sk}^{(i_s^{(1)})}, \qquad \varepsilon_{s2} < \rho_{sk}^{(i_s^{(1)})} - \rho_{sk}^{(i_s^{(1)}-1)} \tag{15}$$

Учтем, что при соблюдении условия (9) переменные $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_n$, определяемые системой уравнений (4), являются определенно-положительными функциями переменных $r_1 r_2, \ldots, r_n, \theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n, \tau$ при всех положительных значениях $r_1, r_2, \ldots, r_n$, всех вещественных $0 \leq \theta_s \leq 2\pi$ и для любого фиксированного значения $\tau = \tau^*$. Это, в частности, означает, что кривые $\rho_s(r_1, r_2, \ldots r_n, \theta_1, \theta_2, \ldots \theta_n \tau^* = C_s$ являются замкнутыми кривыми.

По свойству положительно-определенных функций кривая $\rho_s = \rho_{sk}^{(i_s^{(1)})} - \varepsilon_{s2}$ будет находиться внутри кривой $\rho_s = \rho_{sk}^{(i_s^{(1)})} + \varepsilon_{s1}$. Учитывая, что (10) есть корень системы (14), представим выражение для ρ_s^1 в виде:

$$\rho_s^1 = \sum_{k=1}^{a} \mu^k [\rho_s - \rho_s^{(i_s^{(1)})}(\rho_{ik}^{(i_1^{(1)})}, \ldots, \rho_{s-1,k}^{(i_{s-1}^{(1)})}, \rho_{s+1,k}^{(i_{s+1}^{(1)})}, \rho_{nk}^{(i_n^{(1)})}, \tau^*)]^{\overline{M}_1^{(s)}} \overline{A}_{sk}(\rho_s, \tau^*) +$$
$$+ \mu^{a+1} Q_{s,a+1}(\rho_s, \tau^*) + \ldots, \tag{16}$$

где $\overline{M}_k^{(s)}$ - нечетные числа, а многочлены $\overline{A}_{sk}$ сохраняют знак в указанных пределах (18).

Для того чтобы узнать, каким образом интегральные кривые будут пересекать кривые (14) с помощью (15) и меняя (если будет нужно) θ_s на $-\theta_s$, получим

$$\rho_s^1 = \sum_{k=1}^{a} \mu^k (-\varepsilon_{s1})^{\overline{M}_1^{(1)}} \overline{A}_{sk}(\rho_{ik}^{(i_s^{(1)})} + \varepsilon_{s1}, \tau^*) + \mu^{a+1} Q_{s,a+1}(\rho_s, \tau^*) + \ldots, \tag{17}$$

$$\rho_s^1 = \sum_{k=1}^{a} \mu^k \varepsilon_{s2}^{\overline{M}_1^{(1)}} \overline{A}_{sk}(\rho_{ik}^{(i_s^{(1)})} - \varepsilon_{s2}, \tau^*) + \mu^{a+1} Q_{s,a+1}(\rho_s, \tau^*) + \ldots, \tag{18}$$

Знак производных ρ_s^1 по (17) и (18) при малых значениях μ определяется членами α-го порядка по μ независимо от членов более высокого порядка, т.е.

$$\rho'_s \sum_{k=1}^{\alpha} \mu^k (-\varepsilon_{s1})^{\overset{(s)}{M}_k} \bar{A}_{sk} < 0, \tag{19}$$

$$\rho'_s \sum_{k=1}^{\alpha} \mu^k (-\varepsilon_{s2})^{\overset{(s)}{M}_k} \bar{A}_{sk} > 0. \tag{20}$$

Неравенства (19) и (20) показывают, что интегральные кривые секут кривые $\rho_{sk}^{(s^{(k)})} + \varepsilon_{s1}$ снаружи внутрь, а кривые $\rho_{sk}^{(s^{(k)})} - \varepsilon_{s2}$ - изнутри наружу.

Следовательно, на основании теоремы Бендиксона, можно сказать, что внутри замкнутых областей (14) находится, по крайней мере, по одному предельному значению ρ_s, соответствующему стационарному решению исходной системы.

Таким образом, нами доказано, что достаточным условием существования стационарных решений системы (1) или (3) по членам α-го порядка относительно μ независимо от старших членов, является наличие набора из (11) нечетной кратности.

Рассмотрев набор корней, которые содержат неотрицательные вещественные корни из (11) системы (10) четной кратности, мы бы убедились, что найденные стационарные решения выбором членов, например, при $\mu^{\alpha+1}$, можно сохранить или уничтожить по желанию. Этим и доказывается необходимость условий теоремы.

В случае $\alpha = 1$ (первое приближение) уравнения (10), (*),(13) упрощаются и принимают вид:

$$-\sum_{s=1}^{n} \frac{\partial u_{s1}^{(k_1^{(s)} \ldots k_n^{(s)})}(\theta_s, \tau)}{\partial \theta} + A_{s1}^{(k_1^{(s)} \ldots k_n^{(s)})}(\theta_s, \tau) = g_{s1}^{(k_1^{(s)} \ldots k_n^{(s)})}(\tau),$$

$$g_{s1}^{(k_1^{(s)} \ldots k_n^{(s)})} = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_0^{2\pi} \ldots \int_0^{2\pi} A_{s1}^{(k_1^{(s)} \ldots k_n^{(s)})}(\theta_s, \tau) d\theta_1 \ldots d\theta_n,$$

$$\rho'_s = \mu Q_{s1}^{(M_1^{(s)})}(\rho_s) + \mu^2 Q_{s1}^{(M_2^{(s)})}(\rho_s, Q_s, \tau) + \ldots,$$

а стационарное решение независимо от членов второго и выше порядков по определяется неотрицательными вещественными корнями нечетной кратности следующей системы алгебраических уравнений:

$$Q_{s1}^{(M[*])}(\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_n, \tau^*) = 0, \quad (s=1,2,\ldots,n)$$

Итак, для системы (1) при некоторых ограничениях получены необходимые и достаточные условия существования решений и способы их построения.

Полученные результаты имеют теоретическое и прикладное значение. В частности, сформулированы и доказаны необходимые и достаточные условия существования решений существенно нелинейных систем методом малого параметра. Разработаны алгоритмы построения решений и условия их устойчивости. Данный метод может применяться при исследовании многих задач механики и математики.

С помощью предлагаемого метода определяются траектории движущегося по синусоидальному профилю дороги транспорта, когда жесткость шин на порядок выше жесткости рессор; решается устойчивость любого вида колебаний крутильного вала, а также колебания летательного аппарата при спуске в атмосфере. Обобщается известное уравнение Ван-дер-Поля и т.д.

μ

Литература

1 *Каменков Г.В.* Избранные труды. - М.: Наука, 1971. - Т. 1,2.

2 *Камматов К.К.* Устойчивость и колебания некоторых систем нелинейной механики. - Алматы, 2005.

3 *Камматов К.К., Шамбилова Г.К., Махатова.В.Е.* Необходимые и достаточные условия существования колебаний квазилинейных систем с медленно меняющимися коэффициентами // Докл. НАН РК. - 2005. - № 3. - С.17-23.