УДК 517.958:536.25 МРНТИ 27.35.46

К. А. Калиева, к.ф.-м.н.

Казахский национальный педагогический университет им. Абая

О МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПОЛЯ ТЕМПЕРАТУРЫ И ГРАНИЦЫ ФАЗОВОГО ПЕРЕХОДА В ДВУХСЛОЙНОЙ СРЕДЕ

С использованием решения начально-краевой задачи сопряжения в плоском угле построены зависимость теплового поля и скорость движения границы фазового перехода теплофизического процесса в двухслойной среде.
Ключевые слова: теплофизические процессы, тепломассобмен, поверхностная температура, математическое моделирование, задача с подвижной границей области.

Жазық бұрышқа түйіндес моделдік бастапқы-шекаралық есеп арқылы екі қатпарлы ортадағы жылу-физикалық процесстердің фазалық еткізгіштік жылу ерісінің және шекарасының қозғалыс жылдамдығы анықталған.
Түйінді сездер: жылу-физикалық процестер, жылу-масса алмасу, беттік температура, математикалық моделдеу, шекарасы жылжымалы аймақтағы есеп.

Using decision of initial-regional problem in flat interface are constructeddependence of thermal field and speed of movement's border forthermophysical processin the two-layer environment.
Key words: thermophysical processes, heat and mass transfer, superficial temperature, mathematical modeling, problem with mobile border of area.

В статье рассматривается построение зависимости теплового поля и определение скорости движения границы фазового перехода теплофизического процесса в двухслойной среде с подвижной границей области. Зависимость теплового поля двухслойной среды исследована методом функции Грина (на основе интегральных преобразований Лапласа, Ханкеля и конечного sin-преобразования Фурье), которые дают возможность получить явное аналитическое представление решения двухфазной задачи Стефана.

Математические модели теплофизических процессов в многослойных средах являются одним из основных объектов исследования в теории дифференциальных уравнений с частными производными. Задача о фазовом переходе "жидкость - твердое тело" при описании замерзания воды впервые была рассмотрена в 1889 г. в работах Д. Стефана. Проблему определения поля температуры и границы фазового перехода при плавлении или кристаллизации в чистом веществе называют задачей Стефана. При теплофизических процессах различные части вещества могут находиться в разных агрегатных состояниях (фазах). При этом формы границ раздела фаз со временем меняются. Одним из недостатков такого описания является то обстоятельство, что оно не учитывает зависимость температуры фазового перехода от растворенных в жидкости примесей. Увеличение концентрации примеси понижает температуру фазового перехода. Впоследствии подход Стефана стал использоваться в металлургии для моделирования процессов кристаллизации расплавов. Предположение Стефана о существовании четко выраженной границы фазового перехода - фронта кристаллизации - выполняется далеко не всегда. Так, накопление примесей перед границей "твердая фаза - жидкость", связанное с вытеснением растворенных веществ замерзающей фазой в жидкую матрицу расплава, приводит к возникновению концентрационного переохлаждения. По мере движения границы фазового перехода в глубь расплава происходит увеличение градиента концентрации примеси перед фронтом, и в некоторый момент времени фронтальное описание процесса, вообще говоря, будет уже неприменимо. Это вызвано тем обстоятельством, что появление переохлажденной области перед плоским фронтом затвердевания приводит как к возникновению неустойчивости последнего и формированию дендритных структур, так и к появлению зародышей твердой фазы, претерпевающих рост на различных стадиях: нуклеация, коагуляция, укрупнение, образование кластерных структур. Если концентрационное переохлаждение компенсируется за счет интенсивного выделения скрытой теплоты кристаллизации растущими элементами твердой фазы, то такая область двухфазного состояния вещества - двухфазная зона - может рассматриваться без учета механизмов нуклеации и роста частиц. При этом спектральные задачи, порождённые задачей Стефана, ранее не изучались. Вообще различают однофазные и двухфазные, одномерные и многомерные, стационарные и квазистационарные, классические и модифицированные задачи Стефана.

С математическими аспектами по классической задаче Стефана можно познакомиться в работе [1], где доказывается теорема существования классического решения задачи Стефана для параболического уравнения на малом промежутке времени. Решение задачи получается как предел при решении вспомогательных "регуляризованных" задач. Для решения вспомогательных задач удается установить оценки, позволяющие говорить о компактности семейств решений в пространстве $C^{(2,1)}$.

В работе [2] построены функции Грина для первой и второй начально-краевых задач сопряжения в плоском угле с линией разрыва коэффициента, выходящего на границу области в угловую точку. С помощью тождества Грина получены интегральные представления решений начально-краевых задач сопряжения. Доказаны теоремы существования и единственности в весовых соболевских пространствах.

Краевые задачи сопряжения уравнения теплопроводности с разрывными коэффициентами, когда линия разрыва коэффициента не имеет общих точек с границей области или выходит на границу области, исследованы многими авторами. Начально-краевые задачи сопряжения в прямоугольнике, когда линия разрыва коэффициента выходит на границу области, изучены Е.И. Кимом, Ф.Г. Бирюковой, Р.У. Аргенбаевой. Задачи сопряжения для уравнения теплопроводности с подвижной границей области рассмотрены С.Н.Хариным и его учениками. Г.И.Бижановой описываются задачи сопряжения для линейных и квазилинейных уравнений параболического типа с подвижной границей области. Доказаны существование и единственность решений в малом по времени в весовых гельдеровских пространствах. Получены коэрцитивные оценки решений в нормах этих пространств. Е.Т.Хайруллин исследовал общие одномерные начально-краевые задачи сопряжения, когда граничные условия содержат производные высокого порядка.

Задачи сопряжения для уравнения теплопроводности на полуплоскости

$$D = D_1\left\{r > 0\ ,\ 0 < \varphi < \frac{\pi}{2}\right\} \cup D_2\left\{r > 0\ ,\ \frac{\pi}{2} < \varphi < \pi\right\}$$

с линией разрыва коэффициента, выходящего на границу области, были исследованы Е.И.Кимом и Ш.А.Кулахметовой. М.О. Орынбасаровым рассмотрены начально-краевые задачи сопряжения для уравнения теплопроводности, полипараболического уравнения второго порядка и систем параболических уравнений с разрывными коэффициентами идеального и неидеального контакта.

Задачи сопряжения при растворе угла $\varphi_0 \neq \frac{\pi}{2}$ и $\varphi_1 - \varphi_0 \neq \frac{\pi}{2}$ не вкладываются в класс обычных функций и решение этих задач известными методами не сохраняет нужные свойства гладкости, в частности, это проявляется в особой точке области $r = 0$. Исследование задач сопряжения с нерегулярной границей области показало, что в рассматриваемой области задачи с нерегулярной границей области неразрешимы в функциональном пространстве с равномерной метрикой.

Краевые задачи для уравнения теплопроводности без разрыва коэффициента в плоском угле

$$D = D\{r > 0\ ,\ 0 < \varphi < \theta\},\ 0 < \theta < 2\pi$$

были рассмотрены и исследованы В.А. Солонниковыми, Е.В. Фроловой [3], Е.В. Радкевичем, В.А. Кондратьевым и О.А. Олейниковым. Е.В.Радкевич рассмотрел начально-краевую задачу (без разрыва коэффициента) для уравнения теплопроводности в двухгранном угле, удовлетворяющих условию:

$$0 < 1 + k - \mu < \frac{1}{\sqrt{2}\ \theta} - 1$$

в весовом пространстве $H_{\mu-k-1}^{(k+2,k/2+1)}(Q_T)$,

где θ - плоский угол раствора.

В.А. Солонниковым построена функция Грина в двухгранном угле для уравнения теплопроводности без разрыва коэффициента и получены коэрцитивные оценки в гельдеровских нормах. В.А. Солонниковым и Е.В. Фроловой с помощью преобразования Меллина построена функция Грина для уравнения Лапласа. Затем полученные результаты использованы для доказательства разрешимости начально-краевых задач для уравнения теплопроводности в плоском угле. Задача для уравнения теплопроводности в однослойной среде сведена к разностному уравнению на комплексной плоскости. Получены априорные оценки решений в весовых пространствах С. Л. Соболева $H_{\mu-k-1}^{(k+2,k/2+1)}(Q_T)$ при выполнении условий:

$$0 < 1 + k - \mu < \frac{\pi}{\theta},$$

где θ - плоский угол раствора.

Кроме того, построена функция Грина для первой и второй начально-краевых задач уравнения теплопроводности в плоском угле и получены интегральные представления решений начально-краевых задач сопряжения. При этом показано, что рассматриваемые начально-краевые задачи сопряжения для уравнения теплопроводности в плоском угле

$$D = D_1\{r > 0\ ,\ 0 < \varphi < \varphi_0\} \cup D_2\{r > 0\ ,\ \varphi_0 < \varphi < \varphi_1\}$$

корректно разрешимы в функциональном весовом пространстве с интегральной метрикой и установленные априорные оценки тепловых потенциалов в весовом пространстве С.Л.Соболева $H_{\mu-l-1}^{(l+2,l/2+1)}(D_T)$ при выполнении условия:

$$1/2 < 1 + l - \mu < \lambda_0\ ,\ (\lambda_0 = \min\{\lambda_1, 1\},\ \lambda_1 > \frac{1}{2}\ ,\ 0 < \varphi_0 < \varphi_1 < 2\pi$$

где показатель степенного веса $\mu > 0$ вещественное число;

λ_1 - положительный наименьший корень трансцендентного уравнения:

$\kappa_1 ctg\lambda\varphi_0 + \kappa_2 ctg\lambda(\varphi_1 - \varphi_0) = 0$ для первой начально-краевой задачи .

С практической и научной точки зрения построение математических моделей, способных детально описывать сложные условия кристаллизации или плавления, учитывать взаимодействие конвекции и диффузии в расплаве и связанные с этим механизмы тепломассообмена, несомненно, является актуальной задачей. Основные трудности создания таких моделей возникают из-за необходимости учета: многослойности конструкций с различными теплофизическими свойствами; условий сопряжения и фазовых переходов, которые описываются моделями Стефана.

Математическая постановка двухфазной задачи Стефана

Рассмотрим область

$D_T = \{D_1 \cup D_2\} \times (0,T)$, где $D_1 = \{r > 0,\ 0 < \varphi < \xi(r,t)\}$,

$$D_2 = \{r > 0,\ \xi(r,t) < \varphi < \varphi_1\}$$

с границей $\partial D_1 = \gamma_1 \cup \Gamma$, $\partial D_2 = \Gamma \cup \gamma_2$, где $\gamma_1 = \{r > 0, \varphi = 0\}$,

$\gamma_2 = \{r > 0, \varphi = \varphi_1\}$, $0 < \xi(r,t) < \varphi_1 < 2\pi$, $\Gamma = \{r > 0, \varphi = \xi(r,t)\}$,

где Γ - граница раздела двух фаз.

Тепловое состояние двухслойной среды с учетом теплоты фазового перехода описывается уравнением теплопроводности. Введем обозначения:

$D_T^{(m)}$ =Dm× (О,Т), $\gamma_T^{(m)} = \gamma_m$ × О,Т], при m = 1,2

$$u(r,\varphi,t) = \begin{cases} u_1(r,\varphi,t), & \text{если точка } M(r,\varphi,t) \in D_T^{(1)} \\ u_2(r,\varphi,t), & \text{если точка } M(r,\varphi,t) \in D_T^{(2)} \end{cases}$$

Требуется определить распределение температуры $u(r,\varphi,t)$ (в среде с фазовыми переходами "твердое тело - жидкость"), удовлетворяющей уравнению:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2(\varphi)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}\right) \text{ в области } D_T \qquad (1)$$

где

$$a^2(\varphi) = \begin{cases} a_1^2, \text{если } 0 < \varphi < \xi(r,t) \\ a_2^2, \text{если } \xi(r,t) < \varphi < \varphi_1 \end{cases}$$

начальному условию

$$u\,\Big|_{t=0} = \begin{cases} u_{01}(r,\varphi), \text{если } 0 < \varphi < \xi(r,t) \\ u_{02}(r,\varphi), \text{если } \xi(r,t) < \varphi < \varphi_1 \end{cases} \text{ в области } D \qquad (2)$$

граничным условиям на границе области

$$u_1\,\Big|_{\gamma^{(1)}} = P_1(r,t) \quad , \quad u_2\,\Big|_{\gamma^{(2)}} = P_2(r,t) \qquad (3)$$

и условиям сопряжения на фронте фазового перехода

$$u_1\,\Big|_{\varphi=\xi(r,t)-0} = u_2\,\Big|_{\varphi=\xi(r,t)+0} \qquad (4)$$

$$\kappa_2 \frac{\partial u_2}{\partial n}\,\Big|_{\varphi=\xi(r,t)-0} - \kappa_1 \frac{\partial u_1}{n}\,\Big|_{\varphi=\xi(r,t)+0} = q^* \frac{\partial \xi(r,t)}{\partial t} \qquad (5)$$

где $\frac{\partial \xi(r,t)}{\partial t}$ - скорость движения фазового перехода;

q^*- скрытая теплота плавления или кристаллизации, отнесенная к единице массы твердого тела;

Здесь $\xi(r,t)$ - неизвестная граница фазового движения.

Предположим, что начальная температура удовлетворяет условиям:

$$u_0(r,\varphi) = O(r^{1-\mu}) \ , \quad \frac{\partial u_0(r,\varphi)}{\partial r} = O(r^{-\mu}) \quad \text{при } r \to 0$$

$$u_0(r,\varphi) = o(r^{1-\mu}) \ , \quad \frac{\partial u_0(r,\varphi)}{\partial r} = o(r^{-\mu}) \quad \text{при } r \to \infty$$

Построение распределения поля температуры и определение границы фазового перехода двухфазной задачи Стефана

Функция Грина для задачи сопряжения для уравнения теплопроводности с разрывным коэффициентом

$$G(r,\varphi,r_1,\varphi^{|},t)=\begin{cases} G_{11}=g_1(r,\varphi,r_1,\varphi^{|},t)-G_{11}^{*}(r,\varphi,r_1,\varphi^{|},t), \text{если } 0<\varphi<\varphi_0,\ 0<\varphi^{|}<\varphi_0 \\ G_{12}=G_{12}^{*}(r,\varphi,r_1,\varphi^{|},t), \text{если } 0<\varphi<\varphi_0,\ \varphi_0<\varphi^{|}<\varphi_1 \\ G_{21}=G_{21}^{*}(r,\varphi,r_1,\varphi^{|},t), \text{если } 0<\varphi<\varphi_0,\ \varphi_0<\varphi^{|}<\varphi_1 \\ G_{22}=g_2(r,\varphi,r_1,\varphi^{|},t)-G_{22}^{*}(r,\varphi,r_1,\varphi^{|},t), \text{если } \varphi_0<\varphi<\varphi_1,\ \varphi_0<\varphi^{|}<\varphi_1 \end{cases} \tag{6}$$

$$g_m(r,\varphi,r_1,\varphi^{|},t)=\frac{e^{-\frac{r^2+r_1^2}{4a_m^2t}+\frac{rr_1}{2a_m^2t}\cos((\gamma_m-\varphi)-(\gamma_m-\varphi^{|}))}}{4\pi a_m^2t}-$$

$$-\frac{e^{-\frac{r^2+r_1^2}{4a_m^2t}+\frac{rr_1}{2a_m^2t}\cos((\gamma_m-\varphi)+(\gamma_m-\varphi^{|}))}}{4\pi a_m^2t}+$$

$$+\frac{e^{-\frac{r^2+r^2}{4a_m^2t}+\frac{rr_1}{2a_m^2t}\cos\theta_m}}{2\pi a_m^2t}\, Jm\left\{\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty}\frac{\tilde{\Phi}_m(p,\varphi)\tilde{\Phi}_m(p,\varphi^{|})e^{\theta_m p}}{p\left[\kappa_1 cthp\varphi_0+\kappa_2 cthp(\varphi_1-\varphi_0)\right]}dp\right\}+$$

$$+\frac{e^{-\frac{r^2+r_1^2}{4a_m^2t}}}{2\pi a_m^2t}\int_{\theta_m} e^{\frac{rr_1}{2a_m^2t}\cos\theta}\frac{rr_1\sin\theta}{2a_m^2t}\, Jm\left\{\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty}\frac{\tilde{\Phi}_m(p,\varphi)\tilde{\Phi}_m(p,\varphi^{|})e^{\theta p}}{p\left[\kappa_1 cthp\varphi_0+\kappa_2 cthp(\varphi_1-\varphi_0)\right]}dp\right\}d\theta-$$

$$-\frac{e^{-\frac{r^2+r_1^2}{4a_m^2t}}}{2\pi a_m^2t}\int_0^{\infty} e^{-\frac{rr_1}{2a_m^2t}chz}\frac{rr_1 shz}{2a_m^2t}\, Jm\left\{\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty}\frac{\tilde{\Phi}_m(p,\varphi)\tilde{\Phi}_m(p,\varphi^{|})e^{(\pi+iz)p}}{p\left[\kappa_1 cthp\varphi_0+\kappa_2 cthp(\varphi_1-\varphi_0)\right]}dp\right\}dz$$

$$\theta_m = \begin{cases} \varphi_0 & , \text{ если } \quad m=1 \\ \varphi_0 - \varphi_1 & , \text{ если } \quad m=2 \end{cases}, \quad \gamma_m = \begin{cases} 0 & , \text{ если } \quad m=1 \\ \varphi_1 & , \text{ если } \quad m=2 \end{cases},$$

$$d_m = \begin{cases} [\varphi_0, \pi] & , \text{ если } \quad m=1 \\ [\varphi_1 - \varphi_0, \pi] & , \text{ если } \quad m=2 \end{cases} \tag{7}$$

$$G_{i1}^{*}(r,\varphi,\varphi',t) = \alpha_1\left(\frac{\partial}{\partial t} - a_2^2\Delta\right)\int_0^{\varphi_1} d\theta \int_0^{\infty} r_2 dr_2 \int_0^t g_i(r,\varphi,r_2,\theta,t-\tau)\, g_\alpha(r_1,\varphi^{|},r_2,\theta,\tau)\,d\tau$$

$$G_{i2}^{*}(r,\varphi,\varphi',t) = \alpha_2\left(\frac{\partial}{\partial t} - a_1^2\Delta\right)\int_0^{\varphi_1} d\theta \int_0^{\infty} r_2 dr_2 \int_0^t g_i(r,\varphi,r_2,\theta,t-\tau)\, g_\alpha(r_1,\varphi^{|},r_2,\theta,\tau)\,d\tau$$

$$\alpha^2 = \frac{K_1 + K_2}{b_1 + b_2}\, b(\varphi) = \begin{cases} \rho_1 c_1 & , \quad \text{ если } \quad 0 < \varphi < \varphi_0 \\ \rho_2 c_2 & , \quad \text{ если } \quad \varphi_0 < \varphi < \varphi_1 \end{cases} \tag{8}$$

Распределение температурного поля для задачи Стефана (1)-(5) будем искать в виде суммы тепловых потенциалов:

$$u_1(r,\varphi,t) = \int_0^{\infty}\int_0^{\xi(r_1,\tau)} u_{01}(r_1,\varphi^{|})G_{11}(r,\varphi,r_1,\varphi^{|},t)\,dr_1 d\varphi^{|} + \int_0^{\infty}\int_{\xi(r_1,\tau)}^{\varphi_1} u_{02}(r_1,\varphi^{|})G_{12}(r,\varphi,r_1,\varphi^{|},t)\,dr_1 d\varphi^{|} +$$

$$+2a_1^2\int_0^t d\tau\int_0^{\infty} P_1(r_1,\tau)\left[\frac{\partial G_{11}(r,\varphi,r_1,\varphi^{|},t)}{\partial\varphi^{|}}\right]_{\varphi^{|}=0} dr_1 - 2a_1^2\int_0^t d\tau\int_0^{\infty} P_2(r_1,\tau)\left[\frac{\partial G_{12}(r,\varphi,r_1,\varphi^{|},t)}{\partial\varphi^{|}}\right]_{\varphi^{|}=\varphi_1} dr_1 +$$

$$+\int_0^t d\tau\int_0^{\infty} dr_1 \int_0^{\xi(r_1,\tau)} \omega_1(r_1,\varphi^{|},t)G_{11}(r,\varphi,r_1,\varphi^{|},t)\,d\varphi^{|} + \int_0^t d\tau\int_0^{\infty} dr_1 \int_{\xi(r_1,\tau)}^{\varphi_1} \omega_2(r_1,\varphi^{|},\tau)G_{12}(r,\varphi,r_1,\varphi^{|},t)\,d\varphi^{|} +$$

$$+\int_0^t d\tau\int_0^{\infty} L_0\left[\xi(r_1,\tau)\right]\left[G_{11}(r,\varphi,r_1,\varphi^{|},t) + G_{12}(r,\varphi,r_1,\varphi^{|},t)\right]_{\varphi^{|}=\xi(r_1,\tau)} dr_1 \tag{9}$$

$$u_2(r,\varphi,t)=\int_0^{\infty}\int_0^{\xi(r_1,\tau)} u_{01}(r_1,\varphi^1)G_{21}(r,\varphi,r_1,\varphi^1,t)dr_1d\varphi^1\cdot\int_0^{\infty}\int_{\xi(r_1,\tau)}^{\varphi_1} u_{02}(r_1,\varphi^1)G_{22}(r,\varphi,r_1,\varphi^1,t)dr_1d\varphi^1+$$

$$+2a_1^2\int_0^t d\tau\int_0^{\infty}P_1(r_1,\tau)\left[\frac{\partial G_{21}(r,\varphi,r_1,\varphi^1,t)}{\partial\varphi^1}\right]_{\varphi^1=0}dr_1-\ 2a_2^2\int_0^t d\tau\int_0^{\infty}P_2(r_1,\tau)\left[\frac{\partial G_{22}(r,\varphi,r_1,\varphi^1,t)}{\partial\varphi^1}\right]_{\varphi^1=\varphi_1}dr_1+$$

$$+\int_0^t d\tau\int_0^{\infty}dr_1\int_0^{\xi(r_1,\tau)} \alpha_1(r_1,\varphi^1,t)G_{21}(r,\varphi,r_1,\varphi^1,t)d\varphi^1+$$

$$\int_0^t d\tau\int_0^{\infty}dr_1\int_{\xi(r_1,\tau)}^{\varphi_1} \alpha_2(r_1,\varphi^1,\tau)G_{22}(r,\varphi,r_1,\varphi^1,t)d\varphi^1+ \qquad (10)$$

$$+\int_0^t d\tau\int_0^{\infty}L_0\left[\xi(r_1,\tau)\right]\left[G_{21}(r,\varphi,r_1,\varphi^1,t)+G_{22}(r,\varphi,r_1,\varphi^1,t)\right]_{\varphi^1=\xi(r_1,\tau)}dr_1$$

Здесь оператор $L_0\left[\cdot\right]=\dfrac{\partial^2}{\partial r^2}+\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}$, $\alpha_i(r,t)$ при i = 1,2 - плотности объемных потенциалов;

$\xi(r_1,\tau)$ - граница движения фаз температурного поля.

Плотности и граница движения фаз - пока неизвестные функции. Непосредственно проверяется, что интегральное представление решения (9)-(10) задачи (1)-(5) в виде тепловых потенциалов удовлетворяют неоднородным начально-краевым условиям (2)-(3) в соответствующих областях и первому условию сопряжения.

Удовлетворяя второму условию сопряжения для определения границы раздела фаз, получим уравнение:

$$\frac{\partial\xi(r,t)}{\partial t}-\beta^2\left(\frac{\partial^2\xi(r,t)}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\xi(r,t)}{\partial r}\right)=0,\ \text{где}\ \beta^2=\frac{\kappa_1a_1^2+\kappa_2a_2^2}{q^*}$$

Удовлетворяя уравнению теплопроводности (1), получим систему интегральных уравнений Вольтерра - Фредгольма второго рода:

$$\omega_1(r,t)+\int_0^t d\tau\int_0^\infty dr_1\int_0^{\xi(r_1,\tau)}\omega_1(r_1,\phi,t)H_{11}(r,\varphi,r_1,\phi,t)d\phi+$$

$$\int_0^t d\tau\int_0^\infty dr_1\int_{\xi(r_1,\tau)}^{\varphi_1}\omega_2(r_1,\phi,\tau)H_{22}(r,\varphi,r_1,\phi,t)d\phi=F_2(r,t)$$

$$\omega_2(r,t)+\int_0^t d\tau\int_0^\infty dr_1\int_0^{\xi(r_1,\tau)}\omega_1(r_1,\phi,t)H_{21}(r,\varphi,r_1,\phi,t)d\phi+$$

$$\int_0^t d\tau\int_0^\infty dr_1\int_{\xi(r_1,\tau)}^{\varphi_1}\omega_2(r_1,\phi,\tau)H_{22}(r,\varphi,r_1,\phi,t)d\phi=F_2(r,t)$$

ядра которых имеют оценку:

$$\left|H_{ij}(r,\varphi,r_1,\phi,t)\right|\le M_{ij}\,\frac{e^{-\frac{r^2+r_1^2}{4\beta^2 t}+\frac{rr_1}{2\beta^2 t}\cos(\varphi-\phi)}}{4\pi\beta^2 t^{\frac{3}{2}}},$$

где M_{ij} - положительные константы в соответствующих областях.

Полученная система интегральных уравнений Вольтерра - Фредгольма второго рода решается методом последовательных приближений. Обозначим через λ_1 положительный наименьший корень трансцендентного уравнения $\kappa_1 tg\lambda\,\varphi_0+\kappa_2 tg\lambda\,(\varphi_1-\varphi_0)=0$. Основным результатом исследования является доказательство существования и единственности задачи (1)-(5).

Теорема 1. Пусть целое число $l \geq 0$, вещественные числа $\mu > 0$ и $\lambda_0 = \min\{1, \lambda_1\}$ удовлетворяют неравенству $1/2 < 1 + l - \mu < \lambda_0$ при $\lambda_1 > \frac{1}{2}$, в любых функциях $u_{0i}(r, \varphi) \in H^{(l+1)}_{\mu-l-1}(\Omega)$, $P_i(x, t) \in H^{(l+3/2, l/2+3/4)}_{\mu-l-1}(S_T^{(i)})$ (i=1,2), удовлетворяющих условиям согласования начальных и граничных условий порядка l при $t = 0$ и $r=0$, двухфазная задача Стефана (1)-(5) имеет единственное решение $u_i(r, \varphi, t) \in H^{(l+2, l/2+1)}_{\mu-l-1}(Q_T^{(i)})$, для которого при i=1,2 справедлива оценка нормы

$$\|u_i\|_{H^{(2l+2, l/2+1)}_{\mu-l-1}(Q_T)} \leq C\{ \|u_{01}\|_{H^{(l+1)}_{\mu-l-1}(\Omega_1)} + \|u_{02}\|_{H^{(l+1)}_{\mu-l-1}(\Omega_2)} + \|P_1\|_{H^{(l+3/2, l/2+3/4)}_{\mu-l-1}(\Gamma_T)} + \|P_2\|_{H^{(l+3/2, l/2+3/4)}_{\mu-l-1}(\Gamma_T)} + \|L_0[\xi(r,t)]\|_{H^{(l+3/2, l/2+3/4)}_{\mu-l-1}(\Gamma_T)} \}$$

Здесь оператор $L_0[\cdot] = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}$, граница фазового движения $\xi(r, t)$ определяется по формуле:

$$\xi(r, t) = \int_0^\infty r_1 \xi_0(r_1) \frac{e^{-\frac{r^2 + r_1^2}{4\beta^2 t}}}{\beta^2 t} I_0\left(\frac{r r_1}{2\beta^2 t}\right) dr_1,$$

где $\xi_0(r) = r \sin\varphi_0$, $\quad 0 < \varphi_0 < \pi$, $\beta^2 = \frac{\kappa_1 a_1^2 + \kappa_2 a_2^2}{2q}$.

Таким образом, ускоренное развитие отечественной фундаментальной науки в контексте мировых тенденций; развитие комплекса исследований поведения поверхностной температуры и фронта затвердевания (нагрева), которое имеет первостепенное значение для процесса распространения тепла в многослойных средах с изменяющимся фазовым состоянием, могут быть использованы в различных задачах теплофизики на уровне мировых достижений по ряду основных фундаментальных и прикладных наук и технологий.

Литература

1. *Мейрманов А.М.* О классическом решении многомерной задачи Стефана для квазилинейных параболических уравнений // Матем. сб. - 1980. - № 112 (154); 2(6). - Р. 170-192.

2. *Калиева К.А.* Решение первой начально-краевой задачи сопряжения для уравнения теплопроводности в плоском угле // Изв. НАН РК, Сер. физ.-мат. - 2003. - № 3. - С. 23-32.

4. *Солонников В.А.* О разрешимости классических начально-краевых задач для уравнения теплопроводности в двухгранном угле // Краевые задачи математической физики и смежные вопросы теории функции. - Л.: Наука, 1984. - № 16. - С. 3-165.